INTERPRETACIÓN DE DIAGRAMAS DE COMPARACIÓN MULTIPLICATIVA POR ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Fany González, Elena Castro-Rodríguez y Enrique Castro

Este trabajo se centra en procesos de traducción de problemas gráficos de comparación multiplicativa a representación verbal y simbólica. Pedimos a 89 estudiantes del primer curso de educación secundaria que inventaran un problema que se ajustara a un diagrama y que escribieran una ecuación que integrara las relaciones del diagrama. Los dos procesos de traducción se han mostrado difíciles para los estudiantes, provocando diversidad de respuestas. El análisis conjunto de las respuestas reveló que la competencia de los estudiantes en el proceso de invención no es independiente de la traducción algebraica.

Términos clave: Comparación multiplicativa; Diagramas; Representación simbólica; Representación verbal; Resolución de problemas

Interpretation of Multiplicative Comparison Diagrams by Secondary School Students

This work focuses on translation processes of graphic multiplicative comparison problems to verbal and symbolic representation. We asked 89 students of the first year of secondary school to invent a problem that fits a diagram and to write an equation that integrates the relations of the diagram. The two translation processes have proved difficult for students, resulting diversity of responses. The analysis of the responses revealed that the competence of the students in the process of posing is not independent of the algebraic translation.

Keywords: Diagrams; Multiplicative comparison; Problem solving; Symbolic representation; Verbal representation

Resolver problemas enunciados verbalmente, de carácter aritmético y algebraico, es un aspecto clave del currículo de Matemáticas en la enseñanza obligatoria, y también es uno de los aspectos más problemáticos. ¿Por qué esto es así?, ¿cómo

González, F., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2016). Interpretación de diagramas de comparación multiplicativa por estudiantes de secundaria. *PNA, 10*(4), 280-306.

podemos ayudar a los escolares en estas tareas? (Ng y Lee, 2009). Consideramos que la respuesta a estos y otros interrogantes pasa por realizar estudios que se centren en categorías específicas de problemas, en los que se analicen en profundidad los procesos de resolución con estudiantes de un nivel escolar determinado.

En la literatura especializada sobre resolución de problemas se utiliza el término representación para referirse a la representación interna del problema que construye el resolutor, o bien a las formas externas de carácter semiótico en las que se plantea, reformula o resuelve un problema, y a las que se denominan representaciones externas. Entendemos las representaciones externas en el sentido de Castro y Castro (1997) como "notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes" (p. 96).

La importancia de las representaciones externas en el proceso de aprendizaje y resolución de problemas ha sido ampliamente estudiada (Cuoco y Curcio, 2001; Goldin, 2002; Janvier, 1987; Martínez, Fernández y Flores, 2011), figurando como uno de los principales focos de investigación la utilización de representaciones de tipo gráfico en la resolución de problemas. Al respecto, Hiebert y Carpenter (1992) subrayan que podemos concebir la comprensión de una operación matemática como las conexiones que el sujeto puede establecer entre las diferentes situaciones y representaciones de esa operación. Los diagramas, gráficas, imágenes y otros tipos de representaciones externas se utilizan en diversas actividades de carácter cognitivo como aprendizaje, comprensión, resolución de problemas, o toma de decisiones.

Con este trabajo abordamos puntualmente la resolución de problemas de comparación multiplicativa con estudiantes españoles de primero de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Dada la importancia de las representaciones en el pensamiento matemático, en la comprensión y en la resolución de problemas (Rico, 2009), abordamos distintos procesos de traducción entre representaciones.

USO DE DIAGRAMAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Un diagrama es una representación visual que presenta la información en una disposición espacial (Diezmann y English, 2001). Los diagramas se consideran como representaciones estructurales en los que los detalles superficiales no son importantes (Pantziara, Gagatsis y Pitta-Pantazi, 2004). En resolución de problemas, un diagrama puede servir para representar la estructura de un problema, por lo que su uso ha sido identificado como una de las estrategias y ha sido incorporado como elemento metodológico en propuestas para mejorar la eficiencia en la resolución de problemas matemáticos (Lewis, 1989; Uesaka, Manalo e Ichikawa, 2007; van Garderen, 2007; Yancey, Thompson y Yancey, 1989).

Se ha resaltado la importancia del uso de diagramas en la fase de comprensión o representación de los problemas aritméticos o algebraicos de enunciado verbal, ya que pueden ser utilizados para ayudar a descomprimir la estructura de un problema, y así sentar las bases para su solución. Son útiles también para simplificar una situación compleja, para hacer los conceptos abstractos más concretos y obtener resultados de forma sencilla (Diezmann y English, 2001; Novick, Hurley y Francis, 1999). Beckmann (2004) señala que los problemas pueden ser más difíciles de resolver sin un diagrama.

Diversas investigaciones han hecho hincapié en la importancia de cultivar en los estudiantes capacidades en el uso de la heurística, que incluye la promoción de diagramas. Encontramos como precursor el trabajo de Pólya (1945) y, posteriormente, Schoenfeld (1985), quien confirmó la eficacia de la heurística y el uso de diagramas como estrategia para la resolución de problemas. Particularmente, entre las múltiples estrategias que se han sugerido para mejorar la eficacia en la resolución de problemas de matemáticas, el uso de diagramas ha sido descrito como una de las más eficaces (Hembree, 1992).

En los trabajos de Willis y Fuson (1988) y Fuson y Willis (1989) se muestra la mejora que ocasiona el uso de diagramas en la resolución de problemas verbales (cambio, combinación y comparación) de estructura aditiva. Los estudiantes de primaria participantes, fueron capaces de hacer el diagrama correcto para una categoría determinada, siendo los problemas de comparación los más difíciles, incluso con la ayuda de los diagramas esquemáticos.

Otros estudios han demostrado empíricamente los efectos beneficiosos de la presentación de diagramas específicos o representaciones visuales en la resolución de problemas (Aguilar, Navarro y Alcalde, 2003; Ainsworth y Th Loizou, 2003; Cheng, 2004; Marshall, 1995; Mayer, 2003). Incluso se comparan el orden de presentación concluyendo que la presentación de la imagen previa a la presentación de la narración es más beneficiosa para la comprensión que la presentación de la imagen posteriormente a la narración (Verdi, Johnson, Stock, Kulhavy y Whitman-Ahern, 1997).

En Pantziara et al. (2004) se explora el papel de diagramas en un proceso de resolución de problemas no rutinarios. Administraron dos pruebas a 194 estudiantes de sexto curso (12 años de edad), con seis problemas no rutinarios que podrían resolverse con el uso de un diagrama. En una prueba se les pidió que resolvieran los problemas de la forma que quisieran. En la otra prueba los problemas iban acompañados de diagramas y se les pidió que resolvieran los problemas empleando esos diagramas específicos. Los resultados revelaron que no hubo diferencia estadísticamente significativa entre las dos pruebas, y que los diagramas hacen los problemas más fáciles para algunos estudiantes mientras que para otros los hacen más difíciles. Los autores concluyen que el uso eficiente de un diagrama no implica la solución exitosa de un problema, y en sentido inverso, la solución exitosa de un problema no implica el uso eficiente del diagrama que le acompaña. Además, argumentan que los estudiantes perciben los problemas que van acompañados por diagramas como tareas diferentes y como una ayuda adicional para la solución de los problemas.

Pantziara et al. (2004) parten de la premisa, sustentada por Diezmann y English (2001), de que utilizar los diagramas de manera eficiente es una componente del proceso de desarrollo de los estudiantes y, para ello, deben desarrollar la capacidad de traducir el enunciado de un problema en una representación esquemática y la capacidad de interpretar un diagrama mediante el enunciado de un problema. Sobre estos aspectos su trabajo sugiere que: (a) las destrezas que hay que desarrollar en los escolares no son inherentes a todos los estudiantes, (b) un diagrama específico no tiene el mismo impacto en todos los estudiantes y (c) que un diagrama puede ser incompatible con las representaciones mentales de algunos estudiantes. Además, subrayan la importancia de que los estudiantes practiquen con múltiples representaciones en el proceso de resolución de problemas.

Problemas de comparación multiplicativa

En este trabajo tratamos los diagramas en relación con la resolución de problemas verbales de comparación multiplicativa con enunciado inconsistente (Lewis y Mayer, 1987). Debido a su complejidad lingüística y matemática los estudiantes tienen dificultades para entender y resolver estos problemas (Pape, 2003), llegando a ser considerados uno de los problemas aritméticos más difíciles (Stern, 1993), en los que los estudiantes suelen cometer errores persistentes (Castro, Rico y Castro, 1992). Las investigaciones se han centrado fundamentalmente en caracterizarlos (Greer, 1992), identificar las dificultades y catalogar el tipo de errores que cometen los estudiantes en este tipo de problemas (Castro, 1995), así como en proponer teorías explicativas de las posibles causas de su dificultad. La hipótesis de consistencia (Lewis y Mayer, 1987) y la influencia de los términos marcados o no marcados (Clark, 1969) han sido de las hipótesis más estudiadas a lo largo de este periodo de tiempo con sujetos de distinto nivel de eficiencia en resolución de problemas (Kelly, Lang, Mousley y Davis, 2003; van der Schoot, Bakker-Arkema, Horsley y van Lieshout, 2009; Verschaffel, De Corte y Pauwels, 1992). La mejora de la comprensión de los problemas de comparación multiplicativa a través de la representación de los mismos ha sido también objeto de investigación (Lewis, 1989; Ng y Lee, 2009).

Actualmente a los problemas de comparación multiplicativa se les considera un tipo de situaciones de multiplicación y división (Greer, 1992) y están recogidos explícitamente en propuestas curriculares como los *Common Core Standars for Mathematics* (*National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers*, 2010) en los que se incluyen como uno de los tres tipos de situaciones escolares de multiplicación y división, o en las directrices curriculares de Singapur en las que se ilustran mediante el model method (Ng y Lee, 2009).

Los problemas de comparación multiplicativa describen relaciones estáticas entre cantidades que se enuncian empleando términos como: "veces más que", "veces menos que", y, en este trabajo, empleamos la frase relacional "veces tanto como". En ellos intervienen tres cantidades: el referente, el comparado y el escalar, las cuales pueden ser la incógnita del problema. En el caso de que el referente sea la cantidad desconocida, se dice que el enunciado del problema es inconsistente; si lo es el comparado, se denomina enunciado consistente (Lewis y Mayer, 1987). En los inconsistentes hay conflicto y en los consistentes no. Estos autores señalan que los resolutores tienen un orden de preferencia en la presentación de la información y, además, resuelven mejor los problemas que presentan este orden, que son precisamente los problemas de lenguaje consistente. Cuando se presenta un problema inconsistente, el resolutor reorganiza la frase mentalmente y reconvierte el problema en consistente. Para ello, el sujeto invierte el objeto de la secuencia relacional y la operación sugerida por el término relacional. La necesidad de esta reorganización es probablemente una de las causas de que se cometan errores en los problemas con lenguaje inconsistente.

Traducción a expresión algebraica

Diversas investigaciones se han centrado en la traducción de representaciones verbales a algebraicas ya que es un proceso en el que los estudiantes presentan numerosas dificultades (Rodríguez-Domingo, Molina, Cañadas y Castro, 2015). Particularmente, la comparación multiplicativa de igualación expresada mediante "veces tanto como" se ha utilizado para estudiar las dificultades que conlleva la traducción desde un problema enunciado verbalmente de carácter relacional, a la correspondiente expresión algebraica (Lewis, 1989).

Clement (1982) desarrolló su estudio tomando como centro de atención el problema que en la literatura se conoce como el problema estudiante-profesor: "Una universidad tiene seis veces tantos estudiantes como profesores. Si S es el número de estudiantes y P el número de profesores en la universidad, escribe una ecuación expresando la relación entre S y P". Este estudio pone de manifiesto la respuesta incorrecta más destacable dada por estudiantes universitarios, denominado como el error de inversión. Este error consiste en escribir $6S = P$ en sustitución de la ecuación correcta $6P = S$.

Se ha detectado que los estudiantes que han cometido el error de inversión han interpretado los símbolos literales como etiquetas en vez de como cantidades (Philipp, 1992). En estos casos, cuando se les pregunta a los estudiantes qué significan S y P, consideran que S representa a los estudiantes (del inglés *students*) y que *P* representa a los profesores. Cuando se continúa profundizando y se les pregunta qué representa 6*S*, los estudiantes responden "6 estudiantes", y no "6 veces el número de estudiantes" (Philipp, 1992). Incluso para estudiantes mayores, el empleo de letras en las ecuaciones ofrece dificultad de interpretación. El 38% de los 150 alumnos de primer curso de universidad examinados por Mevarech y Yitschak (1983) (citado en Kieran y Filloy, 1989) contestaron que, en la ecuación $3k = m$, *k* es mayor que *m*.

El proceso de traducción a una expresión algebraica puede verse influido por la interpretación y el uso que hacen los estudiantes del concepto de variable. Kieran y Filloy (1989) subrayan que en la escuela elemental se utilizan las letras fundamentalmente en fórmulas ($A = b \times h, L = \pi \cdot r$) y relaciones entre unidades de medida ($1k = 1000m$). En este segundo caso, las letras se están utilizando como etiquetas, lo que interfiere con su posterior uso como variable.

Küchemann (1978, 1984) realizó un estudio exhaustivo de las interpretaciones que hacen los estudiantes de entre 13 y 15 años de las letras en álgebra. El autor identificó seis modos de interpretar o utilizar los símbolos literales: letra evaluada, letra no utilizada, letra como objeto, letra como incógnita o constante específica, letra como número generalizado y letra utilizada como variable. Usiskin (1988), por su parte, destaca cuatro usos diferentes de las variables y las asocia a diferentes concepciones del álgebra: para realizar generalizaciones, como incógnita en ecuaciones, para establecer relaciones funcionales y como signos arbitrarios para operar.

Teniendo en cuenta estos antecedentes, en este trabajo nos planteamos cómo interpretan modelos gráficos de comparación multiplicativa los estudiantes que inician la ESO (13 años de edad) y qué competencia muestran en la traducción de estos modelos a representación verbal y algebraica. Para dar respuesta a tal pregunta, consideramos los siguientes aspectos.

- Las diferentes interpretaciones que los estudiantes otorgan a los modelos lineales comparativos propuestos como diagramas y si las respuestas de los estudiantes contienen interpretaciones que no estén asociadas a la comparación multiplicativa. Esto sería un indicio de que dichos modelos visuales no tienen un único significado multiplicativo para los estudiantes y pueden servir de modelos para distintas interpretaciones de la multiplicación entre los que se encuentran el isomorfismo de medidas y la comparación.
- Si a los estudiantes les resulta más difícil inventar problemas verbales asociadas al modelo de referente desconocido (algebraico) que a los modelos de comparado desconocido (aritmético). Y si se da el supuesto anterior tratar de identificar qué tipo de respuesta dan los sujetos ante esta dificultad con el modelo de referente desconocido, analizando los errores que cometen, especialmente si cometen el error de inversión.

MÉTODO

Planteamos una investigación exploratoria de tipo descriptivo ante la escasez de estudios previos que aporten información sobre el problema de investigación.

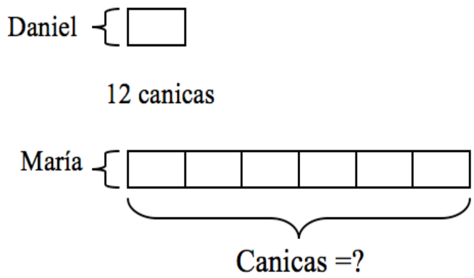
Participantes

En esta experiencia han participado un total de 89 estudiantes de primer curso de ESO de dos institutos públicos de la ciudad de Granada en España, con edades comprendidas entre 12 y 14 años. Los estudiantes no recibieron instrucción específica que formara parte del plan de investigación. No tienen experiencia previa en la invención de problemas. Durante su etapa escolar han utilizado las barras para representar fracciones y también las han utilizado como gráficos estadísticos en los diagramas de barras.

Instrumento

Para estudiar el proceso de traducción de un diagrama de comparación a una expresión simbólica de carácter algebraico por estudiantes de secundaria, utilizamos dos ítems designados como tareas 1 y 2. A continuación, se presenta el enunciado de cada una.

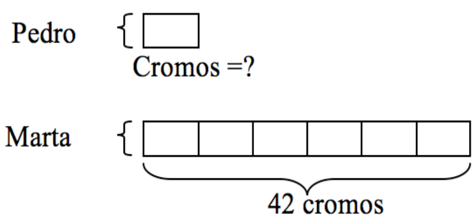
Tarea 1. Dado este diagrama que representa las cantidades que tienen Daniel y María.



a) Inventa un problema que se ajuste al mismo y que contenga la expresión "veces tanto como". Resuelve el problema que has enunciado.

b) Si D representa la cantidad de canicas de Daniel y M representa la cantidad de canicas de María, escribe una ecuación que relacione las cantidades del diagrama.

Tarea 2. En el diagrama siguiente están representadas las cantidades de Pedro y Marta.



a) Inventa un problema que se corresponda con el diagrama que contenga la expresión “veces tanto como”. Resuelve el problema que has enunciado.

b) Empleando las letras P y M para representar las cantidades de Pedro y Marta respectivamente, escribe una ecuación que relacione las cantidades del diagrama.

Ambos ítems contienen un diagrama de comparación multiplicativa que difieren en el papel que desempeña en la comparación la cantidad desconocida. En la tarea 1 la cantidad desconocida es el comparado, mientras que en la tarea 2 la cantidad desconocida es el referente. Estos diagramas de barras son similares al que se utiliza en el model method (Ng y Lee, 2009), también conocido como model drawing (Clark, 2013), para representar gráficamente la comparación multiplicativa en el currículo escolar de Singapur.

Las tareas 1 y 2 planteadas a los estudiantes presentan dos apartados independientes. Un primer apartado en el que se pide que inventen un problema que se corresponda con el diagrama y que contenga la expresión “veces tanto como” (apartado a). Este primer apartado tiene el objetivo de estudiar cómo los estudiantes interpretan verbalmente estos dos tipos de modelos visuales de comparación multiplicativa y si hay diferencias entre ellos.

El segundo apartado de las tareas contempla la representación algebraica de dichos tipos de modelos visuales, en este se pide traducir el diagrama inicial a una ecuación con la condición de que utilicen letras para representar las cantidades correspondientes al referente y al comparado (apartado b). En este caso el objetivo es examinar si la traducción del modelo visual de comparación multiplicativa a una expresión algebraica se ve influenciada por la representación visual de la comparación y el modo en que esta influencia se materializa. Así mismo, queremos hacer patente cómo se refleja en esa traducción del modelo lineal a la expresión algebraica las limitaciones del conocimiento que tienen los estudiantes de nociones algebraicas fundamentales, tales como la interpretación que hacen de las variables.

Procedimiento

Los problemas fueron aplicados y resueltos de forma individual en una prueba de lápiz y papel en el aula habitual de los estudiantes, a la hora normal de clase de matemáticas y con la presencia del profesor de matemáticas y una investigadora. Durante el proceso no hubo intervención por su parte, sólo actuaron en calidad de controladores y observadores de la fiabilidad del proceso de resolución realizado por los estudiantes.

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LAS RESPUESTAS

El análisis de las respuestas dadas por los estudiantes lo realizamos de forma inductiva. Partiendo de los datos, tratamos de identificar categorías y realizar interpretaciones a partir de ellos. En este análisis tenemos en cuenta que los participantes son estudiantes que han tenido un primer acercamiento a las nociones algebraicas y, por tanto, esperamos que en sus producciones se vean reflejadas las limitaciones interpretativas del lenguaje algebraico detectadas en investigaciones previas relativas a la noción de variable (Küchemann, 1978, 1981; Usiskin, 1988).

Las respuestas de los estudiantes en los apartados a y b de las tareas del cuestionario las hemos analizado por separado, agrupando los apartados con interrogantes comunes, (1a y 2a) y (1b y 2b), para que nos permita categorizar las producciones y realizar el análisis de frecuencias simples de las mismas de manera conjunta. Estos apartados tienen como finalidad observar qué tipos de enunciados inventan, partiendo de diagramas de comparación multiplicativa, y saber qué habilidades tienen los estudiantes para pasar de lo gráfico a lo verbal y de lo gráfico a lo algebraico.

A continuación, presentamos en primer lugar, los resultados del análisis de las producciones correspondientes al apartado a de las dos tareas propuestas, correspondientes a la traducción del diagrama a un problema enunciado verbalmente (tareas 1a y 2a). En un apartado posterior, mostramos los resultados del análisis de las respuestas correspondientes al apartado b de las dos tareas propuestas, sobre la traducción del diagrama a una expresión algebraica (tareas 1b y 2b).

Traducción de diagrama a enunciado verbal

La primera decisión que tomamos fue distinguir entre respuestas que contienen o no un problema completo enunciado verbalmente: contienen enunciadas las cantidades, la relación entre ellas y la pregunta. Dentro de cada una de estas opciones delimitamos categorías de respuestas (véase tabla 1).

Tabla 1
Categorización de los enunciados obtenidos

No hay problema enunciado verbalmente	Contienen problema enunciado verbalmente
A1. Respuesta en blanco; no hay registro escrito, sin información.	A5. No es comparación multiplicativa, es isomorfismo de medidas.
A2. Dibuja diagrama nuevo con estructura similar al dado cambiando los nombres de los personajes y las cantidades que se le asignan en el diagrama dado.	A6. Enuncian problema de comparación aditiva.
	A7. Error de inversión en el enunciado.
A3. Enunciado sin sentido o incoherente.	A8. Cambian la expresión relacional a “veces más que” y “veces menos que”.
A4. Incompleto; al enunciado le falta un dato o la pregunta.	A9. Enunciado correcto.

Nota. Ai= categoría de respuesta.

Durante el proceso inductivo de categorización de las respuestas, hemos perfilado y definido como respuesta correcta (categoría A9) la que se ajusta completamente a la información cuantitativa proporcionada por el diagrama (datos numéricos y relación entre ellos). En ella los sujetos enuncian un problema coherente en el lenguaje usual, en el que utilizan los números y los nombres de los objetos que se comparan en el diagrama, así como el término relacional "veces tanto como". Es decir, inventan un problema utilizando la expresión "veces tanto como", tomando los datos presentes en el modelo gráfico, respetando la incógnita, el referente y el comparado.

La figura 1 recoge una respuesta correcta al apartado a de la tarea 1, que enuncia un problema verbal de comparación correctamente, utiliza la frase relacional sugerida, mantiene la estructura del problema y lo resuelve.

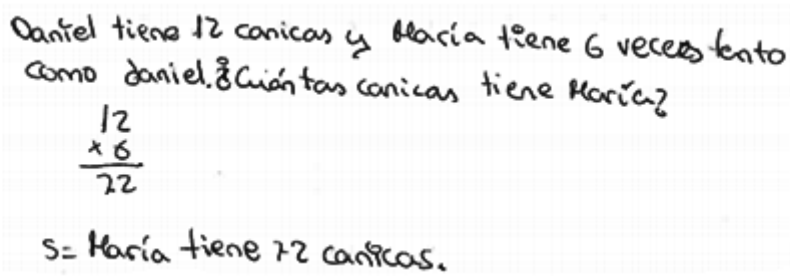


Figura 1. Ejemplo de respuesta correcta a la tarea 1a

Aunque se han presentado en menor medida, hemos considerado también como correctos los enunciados en los que se mantienen las relaciones estructurales dadas en el diagrama, aunque cambien los números y el nombre de los objetos que se comparan. Pensamos que realmente este hecho no supone falta de comprensión del diagrama como modelo de comparación.

En las respuestas que no hemos considerado como correctas, identificamos matices que permiten diferenciarlas en varias categorías, que exponemos seguidamente.

Categorías de respuestas no correctas para las tareas 1a y 2a

Además de las respuestas correctas, en las producciones de los participantes hemos delimitado una serie de categorías entre las que incluimos respuestas en blanco y aquellas que contienen una respuesta explícita no correcta. Estas respuestas nos aportan información relevante. Por ejemplo, las respuestas en blanco van a permitir observar la mayor dificultad de comprensión del diagrama modelo de referente desconocido. Las categorías definidas son las siguientes.

Categoría A1. Sin invención/en blanco. Esta categoría agrupa las respuestas que no contienen información alguna. De las 178 respuestas posibles, 30 están en blanco. La frecuencia con la que no escriben un enunciado o dejan en blanco la pregunta es la segunda más alta (16,85%) sólo superada por la frecuencia de los enunciados correctos (véase tabla 3).

Las respuestas en blanco suben de 11 a 19 en la tarea 2. La mayor dificultad de comprensión que tiene concebir un enunciado de referente desconocido que de comparado desconocido ocasiona que estos estudiantes no construyan el enunciado del problema. Recordemos que la tarea 1 contiene un diagrama que condiciona el enunciado a realizar, problema de comparado desconocido, mientras que el diagrama incluido en la tarea 2 conlleva que el problema a redactar sea de referente desconocido. Así pues, una de las decisiones tomadas por los estudiantes frente a la dificultad de inventar un problema a partir del diagrama ha sido abstenerse y no redactar un enunciado.

Categoría A2. Sin invención/dibuja un diagrama con estructura similar. Esta categoría agrupa aquellos sujetos que consideraron el diagrama modelo proporcionado como la respuesta a dar y construyen un diagrama similar al dado cambiando los personajes y las cantidades del enunciado dado. En primer lugar, resuelven el problema constituido por el diagrama en sí mismo junto con la información numérica que le acompaña, y una vez resuelto, continúan su respuesta con una reproducción del diagrama modelo incluido en el enunciado cambiando los datos y resolviendo el diagrama reproducido. La figura 2 es un ejemplo de respuesta para esta categoría.

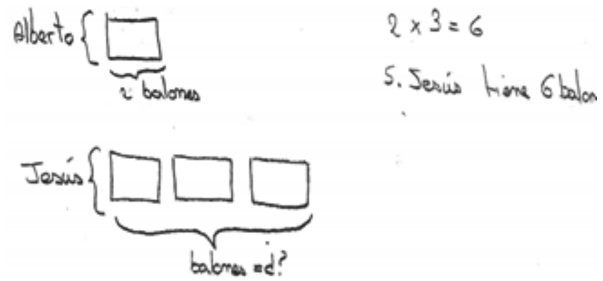


Figura 2. Respuesta correspondiente a la categoría A2

Categoría A3. El enunciado es incongruente/sin sentido. En este caso, las respuestas no establecen relación entre las cantidades, los datos no encajan de forma lógica, hay confusión entre el multiplicador y el multiplicando, faltan datos o la pregunta. En cierto caso confunden el referente con el comparado o viceversa. En las respuestas, se manifiesta que los estudiantes entienden que lo que hay que hacer es resolver el diagrama y, sobre esa solución construyen enunciados incongruentes o sin sentido. Como muestra la figura 3, que representa una respuesta a la tarea 2, el estudiante completa primero cada una de las casillas del modelo con las cantidades correspondientes a los múltiplos de 7. Después de completar cada casilla del diagrama con la serie de los múltiplos de 7, construye un enunciado que trata de reflejar el modelo resuelto: "Pedro tenía 7 cromos y María tenía 42, y tenían los mismos días de conseguir cromos. María había tenido cromos tantas veces como Pedro".

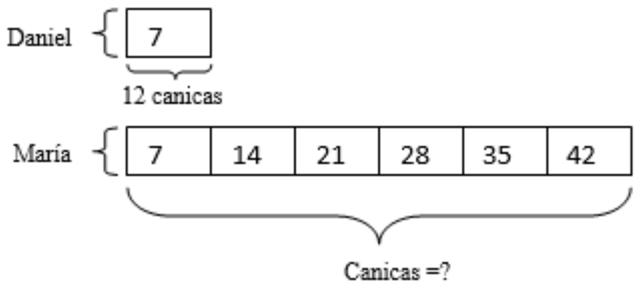


Figura 3. Ejemplo de respuesta correspondiente a la categoría A3

En esta respuesta, el participante comienza describiendo las cantidades de cada personaje, pero no es capaz de precisar cuantitativamente la relación de comparación multiplicativa. El escalar lo expresa en forma indefinida. No plantea pregunta puesto que lo que hace es tratar de reflejar o describir el modelo visual que previamente ha resuelto mediante la serie de los múltiplos de 7.

Categoría A4. Enunciado incompleto: le hace falta algún dato o la interrogante. Entre las respuestas han aparecido también enunciados incompletos. Los enunciados incompletos se caracterizan por omitir algún dato que es necesario para responder a la pregunta formulada. En el ejemplo de respuesta "María tiene 6 veces tanto como Daniel. ¿Cuántos tiene?", el estudiante solo presentó las cantidades de María en la información verbal del problema, faltando los datos de Daniel para completar el enunciado.

Categoría A5. No es comparación multiplicativa. Esta categoría corresponde a aquellas respuestas cuyo enunciado del problema es de estructura multiplicativa, pero no corresponde a la categoría semántica de comparación. Los problemas enunciados corresponden a la categoría que Vergnaud (1983, 1988) denomina isomorfismo de medidas, más concretamente en estas respuestas aparece con asiduidad la idea de grupos iguales (Greer, 1992) o grupos repetidos. Los participantes consideraron el rectángulo más pequeño del modelo como un grupo que contiene 12 elementos y que este grupo se repite seis veces en el rectángulo grande. En el ejemplo de respuesta a la tarea 2 que muestra la figura 4, el estudiante considera que el rectángulo grande del modelo está constituido por seis cajas que, aunque no lo hace explícito, considera iguales en la cantidad de lápices que contienen.

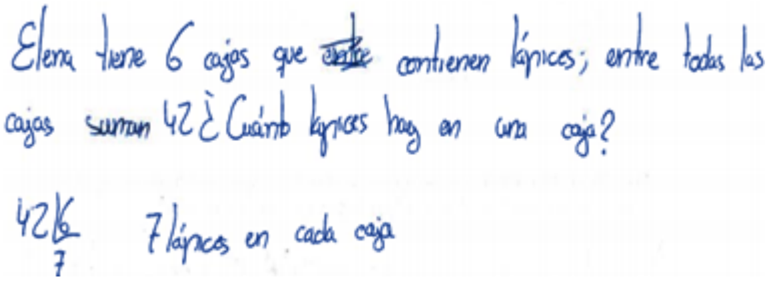


Figura 4. Ejemplo de respuesta correspondiente a la categoría A5

Categoría A6. El enunciado es de comparación aditiva. El enunciado es un problema de comparación en los que aparece la frase relacional "más que" o "menos que". En la figura 5 se muestra una respuesta correspondiente a esta categoría, donde al enunciado le falta incluir la expresión "veces" para ser un problema verbal de comparación multiplicativa.

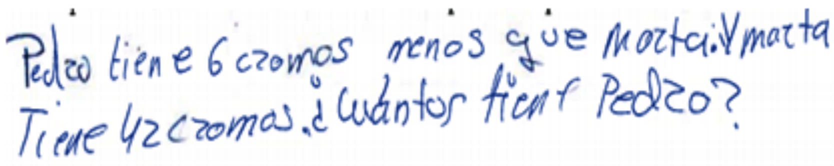


Figura 5. Ejemplo de respuesta correspondiente a la categoría A6

Categoría A7. Cometen error de inversión en el enunciado. En este caso los estudiantes invierten los datos del problema, en el lugar del comparado se coloca el referente o viceversa. El ejemplo de respuesta "Marta tiene 12 cromos y Pedro tiene 6 veces tantos como Marta, ¿cuánto tiene Pedro?", correspondiente a esta categoría, el participante inventó un problema verbal de comparación multiplicativa cometiendo el error de inversión.

Categoría A8. Cambian frase relacional. Los enunciados correspondientes a esta categoría incluyen la frase relacional "veces más" o "veces menos", en lugar de "veces tanto como". En el siguiente enunciado propuesto por un participante "Ana tiene 7 cromos y Pedro tiene 6 veces más que Ana. ¿Cuántos cromos tiene Pedro?" el estudiante enuncia un problema verbal, cambiando la frase relacional sugerida ya que utilizó la frase "veces más" en lugar de "veces tanto como".

Estudio de frecuencias simples para las tareas 1a y 2a

En cuanto al estudio de frecuencias simples realizamos una descripción de las producciones con el fin de detallar el tipo de representación utilizada al resolver los problemas. La tabla 2 muestra la frecuencia y el porcentaje de las distintas categorías basadas en las producciones de las tareas 1a y 2a.

Tabla 2
Frecuencias de las categorías de respuestas dadas a las tareas 1a y 2a

	Frecuencia		Porcentaje		Total	
Categoría	1a	2a	1a	2a	N	%
A1. Sin enunciado/en blanco	11	19	12,36	21,35	30	16,85
A2. Con estructura similar	9	6	10,11	6,74	15	8,43
A3. Incoherente	7	7	7,87	7,87	14	7,87
A4. Incompleto	10	16	11,24	17,98	26	14,61
A5. No es de comparación	7	10	7,87	11,24	17	9,55
A6. Comparación aditiva	1	1	1,12	1,12	2	1,12
A7. Invierte la relación	2	3	2,25	3,37	5	2,81
A8. Cambio de frase relacional	6	10	6,74	11,24	16	8,99
A9. Enunciado correcto	36	17	40,45	19,10	53	29,78
Total	89	89	100	100	178	100

Nota. Ai = categoría de respuesta; N = total de respuestas.

Las frecuencias de respuestas correctas obtenidas a las dos tareas son 36 de 89 para la tarea 1a y 17 de 89 para la tarea 2a. Esto supone un mayor porcentaje de éxito en la invención de problemas de comparado desconocido (38%) frente al porcentaje de éxito en la invención de problema de referente desconocido (16,9%). La presencia del diagrama no elimina la diferencia de dificultad de comprensión entre los dos tipos de enunciados comparativos, los enunciados comparativos de referente desconocido siguen siendo también más difíciles de comprender cuando se trata de inventar enunciados a partir del modelo de barras correspondiente. Esto ocurre al margen de que los sujetos cambien los datos del diagrama presentado en los enunciados que producen.

La diferencia de dificultad global entre las dos tareas puede darse de forma arbitraria o de forma implicativa, en la que los sujetos que responden correctamente a la tarea más difícil (con menor porcentaje de respuestas correctas), lo hacen también a la tarea más fácil. Observando las concordancias de respuestas correctas en las dos tareas hemos obtenido que los 15 estudiantes que responden correctamente a la tarea 2a, con modelo de referente desconocido, también lo hacen en la tarea 1a con modelo de comparado desconocido. Así pues, las respuestas no han sido completamente arbitrarias, sino que lo hacen de forma implicativa.

Hay 19 de los 89 sujetos que han producido un enunciado correcto para el modelo de carácter aritmético, pero no al de carácter algebraico. Sus tipos de respuestas erróneas han sido variadas. Los sujetos que no redactaron correctamente el problema de comparación de referente desconocido, pero si el de comparado desconocido, presentaron cinco alternativas: dejarlo en blanco, redactar un problema de isomorfismo de medidas en el que un grupo se repite, utilizar una comparación de disminución y utilizar (de forma forzada) la expresión “una vez tanto como” e invertir la relación. Estos enunciados incorrectos constituyen tipos de respuestas que los han producido también sujetos que no enuncian un problema en la tarea 1a.

Traducción de diagrama a ecuación algebraica

En el apartado b de las tareas 1 y 2 se pide a los participantes la traducción del diagrama correspondiente a una expresión algebraica.

En las respuestas dadas por los sujetos se observa una variedad de uso de letras, particularmente, se observan dos tipos: las que contienen las letras indicadas en el enunciado de la tarea (D y M en la tarea 1, P y M en la tarea 2) y aquellas en las que no se han utilizado estas letras en sus respuestas.

Una segunda cuestión a destacar es que 18 de los 63 estudiantes que dan algún tipo de respuesta emplean la letra x para producir al menos una respuesta, sea o no necesario el uso de la x. Tres de estos estudiantes sólo utilizan la letra x en una de las tareas. Considerando las dos tareas, son 33 respuestas con x de 126 posibles, es decir, el 26% de las respuestas contienen la letra x.

Categorías de respuestas a las tareas 1b y 2b

Para obtener las categorías de respuestas a las tareas 1b y 2b, hemos completado las ideas anteriores con el hecho de que en las respuestas se establezcan o no relaciones funcionales entre las variables y el uso de operaciones aritméticas. A continuación, se describe la categorización resultante.

Categoría B1. En blanco. Esta categoría agrupa aquellas respuestas que no producen representación externa de ningún tipo como resultado del proceso de traducción que se les pide a los participantes.

Categoría B2. Letra evaluada. Las respuestas correspondientes a esta categoría no incluyen letras, utilizan el signo igual para expresar las sentencias asignativas y se asigna a los sujetos las cantidades correspondientes, por ejemplo “Daniel = 12 canicas, María = 72 canicas”.

Categoría B3. Operaciones aritméticas. En esta categoría los estudiantes no utilizan las letras que se les dan como variables, si no como etiqueta para expresar las cantidades y realizar con ellas una operación aritmética. Un ejemplo de respuesta es “$\text{Daniel} = D = 12$, $\text{María} = M = 12 \times 6$”.

Categoría B4. Ecuaciones en x. La cuarta de las categorías que hemos observado corresponde a aquellas respuestas en las que los participantes utilizan dos números y la letra x para expresar la relación entre las cantidades. Las letras sugeridas en el enunciado (D, P, M) no las utilizan para expresar la relación. Así, un participante dio como solución “$12 \cdot 6 = x$” a la tarea 1b. Para la tarea 2b dio como respuesta “$x \cdot 6 = 42$”.

Categoría B5. Relaciones funcionales. Las respuestas incluidas en esta categoría, denominada relaciones funcionales, contienen o expresan una relación de tipo funcional entre las variables dadas en los enunciados de las tareas propuestas. Los sujetos utilizan las letras que les hemos asignado a las cantidades como variables y establecen entre ellas una relación o función de proporcionalidad que en algunos casos contiene errores. Dentro de esta categoría detectamos tres grupos de respuestas.

- Utilizando números como escalar. Se establece la relación funcional de proporcionalidad entre las variables dadas y la razón de la proporcionalidad se expresan con un número. Por ejemplo “$M = D \cdot 6$” en la tarea 1b y “$M : 6 = P$” en la tarea 2b.
- Utilizando x como etiqueta para el escalar y las letras como variables mediante las que establecen la relación funcional de proporcionalidad. La letra x expresa la razón de la proporcionalidad. Por ejemplo, “$D \cdot x = M$” en la tarea 1 y “$M : x = P$” en la tarea 2.
- Escribiendo relaciones funcionales con errores. En este caso los sujetos escriben una relación entre las variables que contiene algún tipo de error. Uno de los errores detectados ha sido el error de inversión de las variables, es decir, establecen una relación de proporcionalidad simple entre las cantidades, invirtiendo en ella el papel de las cantidades. Por ejemplo, en la tarea 2b han aparecido respuestas del tipo “$P : 6 = M$”, cuando debía haber sido “$M : 6 = P$”, es decir, se ha intercambiado el papel que desempeñan la letras en la relación. Un segundo tipo de error consiste en proponer una relación funcional que corresponde a la proporcionalidad inversa. Por ejemplo, un sujeto dio como respuestas, “$D \cdot M = x$” a la cuestión 1b, y “$P : M = x$”, como respuesta a la cuestión 2b.

Dentro de esta categoría, también incluyen respuestas de tipo funcional solo en apariencia, es decir, tienen las características de una traducción críptica del enunciado del problema, en el que se traduce la expresión comparativa mediante el signo igual, sin considerar que se están comparando dos cantidades. Lo que se iguala son las expresiones simbólicas a las que traducen (de forma sui géneris) las cantidades que se comparan. No hacen intervenir al escalar. Este es el caso de respuestas como “$12 \cdot D = 72 \cdot M$” a la tarea 1b, que revelan una escritura críptica del enunciado. La expresión significa 12 tiene Daniel y 72 tiene María. De manera similar hay que interpretar la respuesta “$D/12 = x/M = 72$” es decir, Daniel tiene 12 y x tiene María que tiene 72.

Estudio de frecuencias simples para las tareas 1b y 2b

En las producciones de este apartado, resalta el alto porcentaje de estudiantes que responden en blanco (véase tabla 3).

Tabla 3

Frecuencias de las categorías de respuestas dadas a las tareas 1b y 2b

	Frecuencia		Porcentaje		Total	
Categoría	1b	2b	1b	2b	N	%
B1. En blanco	27	34	30,4	38,2	61	34,27
B2. Letra evaluada	6	7	6,7	7,8	13	7,30
B3. Operación aritmética	19	16	21,3	18,0	35	19,66
B4. Ecuación	10	8	11,3	9,0	18	10,11
B5. Relación funcional	20	21	22,5	23,6	41	23,03
Otros	7	3	7,8	3,4	10	5,62
Total	89	89	100	100	178	100

Nota. Bi= categoría de respuesta; N = total de respuestas.

En las dos tareas 1b y 2b el número de respuestas en blanco son 27 (30,4%) para la tarea 1b y 34 (38,2%) para la tarea 2b, con la particularidad de que los 27 sujetos que han dejado en blanco la tarea 1 también han dejado en blanco la tarea 2. En la tarea 2b hay siete sujetos más que se han abstenido de responder, pero que han producido una respuesta en la tarea 1b. Esta diferencia puede ser debida a que en el segundo problema los números son más grandes que en el primero a lo que se une que es un problema de referente desconocido.

En las otras categorías las diferencias no son tan abultadas, en ellas podemos observar indicios de comportamiento diferente de un problema a otro. Así, en el problema de comparado desconocido los estudiantes lo han interpretado con más frecuencia que el de referente desconocido como una operación aritmética a realizar y también como una ecuación. Lo mismo ocurre con la categoría denominada Otros. Las categorías B2 (Letra evaluada) y B5 (Relación funcional) obtienen porcentajes muy similares en ambos problemas.

Interpretación conjunta

Una vez analizadas y categorizadas por separado las producciones con respecto a la invención de problemas y a la representación algebraica de los dos diagramas de comparación, procedemos a categorizar las respuestas de los sujetos simultáneamente en ambos aspectos, tratando de detectar si estos dos procesos de invención y de simbolización algebraica son independientes o no en los participantes. Es decir, si las respuestas producidas en la tarea de invención de un enunciado a partir del diagrama de comparación guardan alguna relación con la tarea de escribir una ecuación algebraica. Para ello hemos construido una tabla de contingencia con las frecuencias de respuesta a las dos variables: invención y representación algebraica (véase tabla 4).

Para realizar la categorización cruzada hemos agrupado las categorías establecidas previamente, en cada una de las variables de clasificación. En cada variable hemos establecido tres valores: nivel bajo, medio y alto. La decisión de adoptar estos valores ha venido inducida o sugerida por un análisis clúster previo de los datos. En esta tabla de frecuencias hemos sintetizado las distintas categorías de respuestas de los estudiantes en el apartado a de invención como: bajo (categorías A1, A2 y A3), medio (categorías A4, A5 y A6) y alto (categorías A7, A8 y A9). De igual forma para el apartado b de representación algebraica: el rendimiento bajo (categorías B1 y Otros), medio (categorías B2 y B3) y alto (categorías B4 y B5).

Tabla 4
Frecuencia conjunta de las variables invención y representación algebraica en las tareas 1 y 2

	Invención			
Representación algebraica	Bajo	Medio	Alto	Total
Bajo	41	11	19	71
Medio	6	21	21	48
Alto	12	13	34	59
Total	59	45	74	178

El valor de Chi-cuadrado de Pearson, utilizado para estudiar la independencia entre la invención de enunciados comparativos y la representación simbólica a partir del diagrama de comparación es $\chi^2 = 38{,}938$ (con 4 grados de libertad y N=178), p=0,000, siendo este significativo. Por lo tanto, rechazamos la hipótesis nula de independencia entre la invención y la representación simbólica.

En la tabla de contingencia se observa que las frecuencias más altas se encuentran en la diagonal principal de la tabla. La suma de los tres valores $(41+21+34=96)$ nos indica que más del cincuenta por ciento de las respuestas (55%) tienen un comportamiento similar en ambas variables. La mayor frecuencia se da entre los estudiantes que tienen una respuesta conjunta baja en invención y en representación, seguido por el grupo de estudiantes que tienen una respuesta de nivel alto en ambas variables. Por otro lado, destacar que hay un grupo de estudiantes con un nivel de representación simbólica mediano que se sitúan en un nivel mediano (21 respuestas) o alto en invención (21 respuestas). En general, el nivel medio y alto en invención es más frecuente que en representación algebraica.

Las apreciaciones globales anteriores las matizamos con respecto a cada uno de las tareas 1 y 2. La tabla 5 contiene las frecuencias correspondientes a la tarea 1.

Tabla 5
Frecuencia conjunta de las variables invención y representación algebraica en la tarea 1

	Invención			
Representación algebraica	Bajo	Medio	Alto	Total
Bajo	20	2	12	34
Medio	2	10	14	26
Alto	5	6	18	29
Total	27	18	44	89

En la tabla 6 mostramos las frecuencias correspondientes a la tarea 2.

Tabla 6
Frecuencia conjunta de las variables invención y representación algebraica en la tarea 2

	Invención			
Representación algebraica	Bajo	Medio	Alto	Total
Bajo	21	7	9	37
Medio	4	11	9	24
Alto	7	7	14	28
Total	32	27	30	89

En el diagrama que denominamos modelo algebraico, de referente desconocido (tarea 2), en el que se pide hallar una cantidad referente a partir de otra cantidad comparada y el escalar, los sujetos han tenido un rendimiento menor en invención de enunciados que en el diagrama de comparado desconocido (tarea 1). Se deduce que el tipo de cantidad desconocida en el diagrama de comparación tiene influencia en la invención de enunciados, es decir, el hecho de que sea el referente la cantidad desconocida ocasiona cierta dificultad de articular enunciados de problemas de comparación. Observamos, sin embargo, que este hecho no incide prácticamente en la representación algebraica, es decir, la distribución de las frecuencias en el apartado representación algebraica, de nivel alto, medio y bajo, es similar en los diagramas de referente desconocido y comparado desconocido (tareas 1 y 2).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El estudio realizado contempla dos tipos de traducciones. El primer tipo a partir de dos diagramas que representan dos tipos de comparación, una de referente desconocido (tarea 2) y otra de comparado desconocido (tarea 1), e implica hacer una primera traducción de estos diagramas modelo a un problema de enunciado verbal. El segundo tipo considera la traducción de los diagramas modelo a una expresión algebraica de carácter simbólico. En primer lugar, presentamos las conclusiones para cada una de las traducciones de manera independiente y, finalmente, comparamos los resultados de ambas traducciones.

Traducción a enunciado verbal

La primera traducción implica inventar o reformular de forma verbal un problema análogo al que se propone en el diagrama, habilidad en la que no han sido ejercitados estos escolares, que es uno de los factores que influyen en el alto porcentaje (16,85 %) de respuestas en blanco. A este porcentaje contribuyen de forma distinta los dos problemas. Mientras que en la tarea 1 (comparado desconocido) el porcentaje es del 12,36%, en la tarea 2 (referente desconocido) el porcentaje es 21,35%, es decir, casi el doble. Con ello se pone de nuevo de manifiesto la mayor dificultad de comprensión de los problemas con referente desconocido frente a los de comparado desconocido.

Entre los dos tipos de problemas de comparación no sólo se manifiestan diferencias de comprensión en las respuestas en blanco. Con respecto al proceso de traducción a un enunciado verbal, el diagrama que representa el modelo de comparación multiplicativa con referente desconocido (tarea 2) ha provocado más respuestas inadecuadas o incorrectas que el diagrama correspondiente al modelo de comparación de comparado desconocido (tarea 1). Esto es coincidente con resultados obtenidos en resolución de problemas de comparación, en el que los problemas de referente desconocido tienen una tasa menor de éxito. Pero hay una diferencia fundamental con respecto al tipo de error que cometen en nuestro estudio. En las investigaciones previas sobre resolución de problemas verbales de comparación multiplicativa (Castro, 1995) se resalta la frecuencia con la que aparece el error de inversión en los problemas de referente desconocido frente a los de comparado desconocido. Sin embargo, en nuestro estudio en el que el problema de comparación se plantea mediante un diagrama modelo, en el proceso de invención de enunciados, el error de inversión ha aparecido un número muy reducido de veces, siendo el tipo de respuesta incorrecta que menor frecuencia ha obtenido junto con redactar un problema de comparación aditiva. Esperábamos que aparecieran, en los enunciados producidos por los estudiantes, errores sistemáticos asociados a la resolución de problemas de comparación multiplicativa, como el error de inversión o comparación aditiva. Nos ha sorprendido la escasa presencia de enunciados de comparación que contengan errores sistemáticos y la escasa diferencia entre los que se han producido en el modelo algebraico frente al aritmético.

Las diferencias de actuación que han tenido los participantes en las dos tareas de invención de problemas se han manifestado en varios aspectos. En el problema de referente desconocido (modelo algebraico) hay mayor número de respuestas en blanco, mayor número de respuestas incompletas, mayor número de enunciados que no corresponden a problemas de comparación o cambian la frase comparativa. Todos ellos son síntomas de la mayor dificultad de comprensión que tiene el problema de comparación multiplicativa de referente desconocido frente al de comparado desconocido. No todas las dificultades son del mismo nivel, aunque todas revelan que los problemas de comparación de referente desconocido son más difíciles de comprender que los comparado desconocido.

Puesto que, en los diagramas propuestos como modelos de la comparación multiplicativa, la barra mayor aparece con una partición de la misma en partes equivalentes al referente, en los enunciados construidos a partir del modelo algebraico cabía la posibilidad de que se expresara la relación utilizando fracciones. Sin embargo, ninguna de las 89 respuestas contiene fracciones explícitamente. Lo más aproximado al empleo de ideas fraccionarias ha sido la expresión, presente en un par de respuestas, "Marta tiene 42 canicas y Pedro tiene una vez", se supone que seis de la partición presentada gráficamente de esas 42 canicas.

El en proceso de traducción de diagrama a enunciado verbal encontramos que el porcentaje sobre el total de respuestas que contienen un problema de isomorfismo de medidas no es muy elevado (9,55%), si tenemos en cuenta que se les pide a los estudiantes que enuncien un problema con la expresión comparativa "veces tanto como", cabe pensar que en realidad este porcentaje habría sido mayor sin esta condición.

Por otro lado, si consideramos el porcentaje de estudiantes que interpretan el modelo visual como isomorfismo de medidas sobre el número de alumnos que redactan un problema completo de estructura multiplicativa obtenemos un 32%. Este porcentaje de estudiantes dominan correctamente las relaciones multiplicativas entre los datos del problema, pero no lo asocian con un problema de comparación, por lo que concluimos que aproximadamente un tercio de los sujetos pueden resolver un problema de comparación multiplicativa empleando un esquema mental asociado al significado de grupos iguales.

Los resultados que hemos obtenido muestran que los estudiantes pueden acomodar un esquema mental correspondiente a una categoría semántica de problemas para resolver los problemas que corresponde a otra categoría semántica de la que no disponen aún de un esquema mental totalmente construido.

Traducción algebraica

En las respuestas a las tareas 1b y 2b destaca el alto porcentaje de abstención o de no respuesta. Este resultado no es de extrañar, dado que los estudiantes se encuentran en la etapa de iniciación en el lenguaje algebraico y las tareas que les hemos propuesto no son habituales para ellos. Se ha hipotetizado que este tipo de diagramas favorece la escritura de las ecuaciones algebraicas, y quizás podría ser una ayuda en manos del docente. En el caso de los alumnos al introducir los diagramas por primera vez, sin explicación previa y sin tener experiencia en procesos de traducción entre sistemas de representación, un primer efecto que produce es el de bloqueo del estudiante, que se abstiene de dar una respuesta. Resolver un diagrama como los que le presentamos en las tareas no es difícil para estos estudiantes, pero sí lo es traducirlo a relaciones algebraicas.

El proceso de traducción de los diagramas comparativos a la expresión algebraica se ha visto fuertemente condicionado por el conocimiento específico del lenguaje algebraico por parte de los participantes, lo que ha provocado una regresión hacia procesos previos, como escribir una ecuación en x, una operación aritmética o evaluar las letras. En los apartados En blanco y Letra evaluada los sujetos simplemente no dan respuesta o es incompleta. Sin embargo, en los apartados Ecuación y Relación funcional observamos que hay sujetos que cometen errores entre los que están el error de inversión en pocas ocasiones y confunden el escalar con el comparado. Otros sujetos utilizan una forma más compleja de escribir algo parecido a una proporción (regla de tres), que finalmente viene a ser una forma de escribir el enunciado siguiendo sus propias pautas. De todo ello, concluimos que hay dos aspectos fundamentales que han condicionado las respuestas de los sujetos. Una es el nivel de conocimiento del lenguaje algebraico y otra es la mayor dificultad de comprensión del diagrama en el modelo algebraico que en aritmético.

Comparación entre los dos procesos de traducción

Enunciar un problema o escribir una ecuación a partir de los diagramas comparativos no han resultado ser procesos independientes. En general, los estudiantes han sido más competentes en traducir los diagramas a enunciados verbales que a expresiones algebraicas. Pensamos que la representación simbólica requiere adquirir conocimientos específicos y manejo de las variables para escribir el modelo algebraico, conocimiento que aún no han adquirido los estudiantes, mientras que la invención no requiere un conocimiento específico que haya que aprender.

El tipo de diagrama-modelo (aritmético o algebraico) que se plantea como problema de comparación, influye en la invención de enunciados, produciendo un menor rendimiento de los estudiantes el modelo algebraico que el aritmético. Sin embargo, la diferencia en la escritura de ecuaciones entre los dos modelos no es tan apreciable.

REFLEXIÓN FINAL

Los estudios previos habían puesto de manifiesto la mayor dificultad de comprensión de los enunciados inconsistentes de los problemas de comparación, frente a los de enunciado consistente. Nuestro estudio subraya que esa mayor dificultad se mantiene en la traducción de los modelos gráficos de comparación correspondientes a estos problemas a enunciados verbales y modelos algebraicos. Esto nos hace pensar que la causa de esa dificultad (al menos parte de ella) no reside en su formulación lingüística, sino que tiene que ver con la comprensión de una relación matemática, en este caso la de comparación, y con la capacidad de invertir esta relación. A esta última función pueden contribuir los dos diagramas-modelo que hemos utilizado en este estudio, pero no sólo con hacerlos aparecer junto al enunciado del problema. Si queremos que los estudiantes tengan éxito al resolver problemas de comparación, debemos hacerles comprender la estructura lógica de las relaciones entre las cantidades que están presentes en los problemas de comparación. Los dos modelos que presentamos tienen la misma forma, representan la misma relación, pero la cantidad desconocida no es la misma. Por ello, hacer que los estudiantes reflexionen sobre esos modelos y su traducción a expresiones algebraicas asociadas puede contribuir a que construyan una red mental más amplia del esquema de comparación.

En nuestro estudio hemos utilizado problemas simples de comparación, de un sólo paso, estos problemas suelen aparecer como parte de otros problemas más complejos, cuya estructura lógica de relaciones puede no ser fácil de representar mediante un diagrama-modelo. Nos preguntamos si presentar “a priori” un diagrama-modelo de estos problemas de mayor complejidad sería beneficioso para la comprensión de los mismos por parte de los estudiantes y cuáles serían sus límites.

Agradecimiento

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

REFERENCIAS

Aguilar, M., Navarro, J. I. y Alcalde, C. (2003). El uso de esquemas figurativos para ayudar a resolver problemas aritméticos. *Cultura y Educación, 15*(4), 385-397.

Ainsworth, S. y Th Loizou, A. (2003). The effects of self-explaining when learning with text or diagrams. *Cognitive Science, 27*(4), 669-681.

Beckmann, S. (2004). Solving algebra and other story problems with simple diagrams: A method demonstrated in grade 4-6 texts used in Singapore. *The Mathematics Educator, 14*(1), 42-46.

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Granada, España: Comares.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria.* Barcelona, España: ICE/Horsori.

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1992). Choice of structure and interpretation of relation in multiplicative compare problems. En W. Geeslin y K. Graham (Eds.), *Proceedings of the sixteenth Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 113-120). Durham, NH: University of New Hampshire.

Cheng, P. C-H. (2004). Why diagrams are (sometimes) six times easier than words: Benefit beyond locational indexing. En A. Blackwell, K. Marriott y A. Shimojima (Eds.), *Diagrammatic representation and inference, third international conference, diagrams* (pp. 242-254). Heidelberg, Alemania: Springer.

Clark, A. (2013). *Singapore math: A visual approach to word problems*. Boston, MA: Houghton Mifflin Harcourt.

Clark, H. H. (1969). Linguistic processes in deductive reasoning. *Psychological Review, 76*, 387-404.

Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(1), 16-30.

Cuoco, A. A. y Curcio, F. R. (2001). *The role of representation in school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Diezmann, C. M. y English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. En A. A. Cuoco y F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics: 2001 Yearbook* (pp. 77-89). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Fuson, K. C. y Willis, G. B. (1989). Second graders' use of schematic drawings in solving addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology*, *81*(4), 514-520.

Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). Londres, Reino Unido: Lawrence Erlbaum Associates.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on learning and teaching mathematics* (pp. 276-295). NuevaYork, NY: Macmillan.

Hembree, R. (1992). Experiments and relational studies in problem solving-a metaanalysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(3), 242-273.

Hiebert, J. y Carpenter, Th. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. W. Grouws (Ed.), *Handbook of research in teaching and learning of mathematics* (pp. 65-97). Nueva York, NY: Macmillan.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kelly, R. R., Lang H. G., Mousley, K. y Davis, S. M. (2003). Deaf college students' comprehension of relational language in arithmetic compare problems. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education, 8*(2), 120-132.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, *7*(3), 229-240.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School, 7*(4), 23-26.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics* (pp. 11-16). Londres, Reino Unido: John Murray.

Lewis, A. B. (1989). Training students to represent arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 81*, 521-531.

Lewis, A. B. y Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 79*, 363-371.

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving*. Nueva York, NY: Cambridge University Press.

Martínez, M. V., Fernández, F. y Flores, P. (2011). Clasificación de problemas verbales de álgebra elemental a partir de su resolución mediante un modelo geométrico-lineal. *Unión, 25*, 43-61.

Mayer, R. E. (2003). The promise of multimedia learning: Using the same instructional design methods across different media. *Learning and Instruction, 13*, 125-139.

National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers. (2010). *Common core state standards for mathematics.* Washington, DC: Autores

Ng, S. F. y Lee, K. (2009). The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(3), 282-313.

Novick, L. R., Hurley, S. M. y Francis, M. (1999). Evidence for abstract, schematic knowledge of three spatial diagram representations. *Memory & Cognition, 27,* 288-308.

Pantziara, M., Gagatsis, A. y Pitta-Pantazi, D. (2004). The use of diagrams in solving non routine problems. En M. Johnsen Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the*

Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 489-496). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Pape, S. J. (2003). Compare word problems: Consistency hypothesis revisited. *Contemporany Educational Psychology*, *28*, 396-142.

Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *The Mathematics Teacher, 85*(7), 557-561.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2015). Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. *PNA, 9*(4), 273-293.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego, CA: Academic Press.

Stern, E. (1993). What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so difficult for children? *Journal of Educational Psychology, 85*(1), 7-23.

Uesaka, Y., Manalo, E. e Ichikawa, S. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use of diagrams in mathematics problem solving? *Learning and Instruction*, *17*(3), 322-335.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford y A. P. Schulte (Eds.), *Ideas of algebra, K-12, 1988 yearbook* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

van der Schoot, M., Bakker-Arkema, A. H., Horsley, T. M. y van Lieshout, E. C. D. M. (2009). The consistency effect depends on markedness in less successful but not successful problem solvers: An eye fixation study in primary school children. *Contemporary Educational Psychology, 34*, 58-66.

van Garderen, D. (2007). Teaching students with LD to use diagrams to solve mathematical word problems. *Journal of Learning Disabilities, 40*(6), 540-553.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Pauwels, A. (1992). Solving compare problems: An eye movement test of Lewis and Mayer's consistency hypothesis. *Journal of Educational Psychology, 84,* 85-94.

Verdi, M. P., Johnson, J. T., Stock, W. A., Kulhavy, R. W. y Whitman-Ahern, P. (1997). Organized spatial displays and texts. Effects of presentation order and display type on learning outcomes. *Journal of Experimental Education, 4*, 303-317.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Londres, Reino Unido: Academy Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Willis, G. B. y Fuson, K. C. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problem. *Journal of Educational Psychology*, *80*(2), 192-201.

Yancey, A. V., Thompson, C. S. y Yancey, J. S. (1989). Children must learn to draw diagrams. *Arithmetic Teacher, 36*(7), 15-23.

Fany M. González
Universidad Nacional de Panamá
fago1830@gmail.com

Elena Castro-Rodríguez
Universidad de Granada
elenacastro@ugr.es

Enrique Castro
Universidad de Granada
ecastro@ugr.es

Recibido: Setiembre 2015. Aceptado: Marzo 2016.
Handle: http://hdl.handle.net/10481/41629